## **基础课54 排列与组合**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 排列与排列数 | 理解 | 2023年全国甲卷（理） | ★★☆ | 逻辑推理  数学运算 |
| 组合与组合数 | 理解 | 2023年新高考Ⅰ卷 | ★★★ | 逻辑推理  数学运算 |
| 排列组合综合 | 掌握 | 2023年新高考Ⅱ卷  2023年全国乙卷（理） | ★★☆ | 逻辑推理  数学运算  数学建模 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，选择题、填空题都出现过，属于基础题型，与概率知识结合的可能性较大.预计2025年高考的命题情况变化不大，但命题背景会比较新颖 | | | |

### **基础知识·诊断**

#### **夯实基础**

##### **一、排列与组合的概念**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 名称 | 定义 | |
| 排列 | 从个不同元素中取出个元素 | 按照①一定的顺序排成一列 |
| 组合 | 作为一组 |

##### **二、排列数与组合数**

1.排列数：从个不同元素中取出个元素的所有②不同排列的个数，用符号③表示.

2.组合数：从个不同元素中取出个元素的所有④不同组合的个数，用符号⑤表示.

##### **三、排列数、组合数的公式及性质**

|  |  |
| --- | --- |
| 公式 | （1），且.  （2），且.特别地 |
| 性质 | 1；.  ； |

#### **诊断自测**

##### **题组1 走出误区**

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 在分类加法计数原理中，每类方案中的方法都能直接完成这件事.( √ )

（2） 在分步乘法计数原理中，事情是分多步完成的，其中任何一个单独的步骤都能完成这件事.( × )

（3） 若组合数公式，则成立.( × )

（4） .( × )

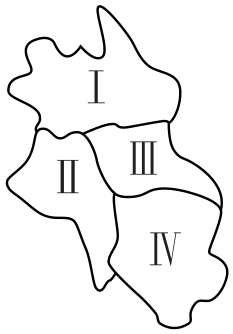
2. （易错题）若把5张不同的电影票分给4个人，每人至少一张，则不同的分法种数为240.

【**易错点**】本题易混淆“排列”与“组合”.

[解析]由题意知，其中一人分两张，先分后排，共有种不同的分法.

##### **题组2 走进教材**

3. （人教A版选修③P27·T17改编）如图，现要用5种不同的颜色对某市的4个区县地图进行着色，要求有公共边的两个地区不能用同一种颜色，则共有180种不同的着色方法.



[解析]先排Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ共有（种），Ⅳ有种，则不同的着色方法有（种）.

4. （双空题）（人教A版选修③P27·T13改编）从5名男生和4名女生中选出4人去参加一项创新大赛.如果4人中男生、女生各选2人，那么有60种选法;如果男生中的甲和女生中的乙必须在内，那么有21种选法.

[解析]如果4人中男生、女生各选2人，那么有种选法；如果男生中的甲和女生中的乙必须在内，那么在剩下的7人中任选2人，有种选法.

##### **题组3 走向高考**

5. [2023·全国乙卷]若甲、乙两位同学从6种课外读物中各自选读2种，则这两人选读的课外读物中恰有1种相同的选法共有( C ).

A. 30种 B. 60种 C. 120种 D. 240种

[解析]首先确定相同的读物，共有种情况，然后确定两人各自的另外一种读物相当于在剩余的5种读物里，选出两种进行排列，共有种，根据分步乘法计数原理得，共有（种）.故选.

### **考点聚焦·突破**

#### **考点一 排列问题［自主练透］**

（一题练透）有3名男生，4名女生，在下列不同条件下，求不同的排列组合方法总数.

（1） （直接法）选其中5人排成一排；

[解析]从7个人中选5个人排，故排法有种；

（2） （整体法）排成前后两排，前排3人，后排4人；

[解析]前排3人，后排4人就是7人排成一排的全排列，故排法共有种；

（3） （优先法）全体排成一排，甲不站排头也不站排尾；

[解析]甲为特殊元素，优先安排，有5种方法，其余6人有种方法，故排法共有（种）.

（4） （捆绑法）全体排成一排，女生必须站一起；

[解析]将女生看作一个整体，与3名男生一起全排列，有种方法，再将4名女生进行全排列，也有种方法，故排法总共有（种）.

（5） （插空法）全体排成一排，男生互不相邻；

[解析]男生不相邻，而女生不作要求，所以应先排女生，有种方法，再在空出的5个空位（包括首尾空位）中任选3个空位排男生，有种方法，故排法共有（种）.

（6） （捆绑法）全体排成一排，甲、乙两人中间恰好有3人；

[解析]把甲、乙两人及中间3人看作一个整体，第一步，先排甲、乙两人，有种排法；第二步，从余下5人中选3人排在甲、乙中间，有种排法；第三步，把这个整体与余下2人进行全排列，有种排法.故排法共有（种）.

（7） （定序法）全体排成一排，其中男生按从高到矮的顺序；

[解析]7人的全排列有种，其中男生的全排列有种，而从高到矮的排列数是总排列数的，故排法共有（种）.

（8） （间接法）全体排成一排，甲不排在最左端，乙不排在最右端；

[解析]7人的全排列有种，其中不符合条件的有甲在最左端时，有种，乙在最右端时，有种，其中都包含了甲在最左端，同时乙在最右端的情形，有种.故排法共有（种）.

（9） （定序法）全体排成一排，其中男生顺序一定，女生顺序一定.

[解析]7人的全排列有种，其中男生的全排列有种，女生的全排列有种，参考第（7）题，故排法共有（种）.



**求排列问题的基本解题方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 直接法 | 对于无限制条件的排列，直接利用两个计数原理列出排列数计算 |
| 优先法 | 对于特殊元素（或位置）优先安排 |
| 捆绑法 | 针对相邻元素的排列 |
| 插空法 | 针对不相邻元素的排列（间隔排列） |
| 整体法 | 针对元素分成多排问题，可归结为一排考虑 |
| 定序法 | 可先不考虑顺序限制进行排列，再除以定序元素的全排列 |
| 间接法 | 正难则反，等价转化处理 |

#### **考点二 组合问题［自主练透］**

（一题练透）有3名男生，4名女生，现从中选3人.在下列不同条件下，求不同的选法总数.

（1） 男生甲必须被选中；

[解析]从余下的6人中选取2人，故共有种选法.

（2） 女生乙不能被选中；

[解析]（法一：直接法）从余下的6人种选取3人，共有种选法.

（法二：间接法）总的选法有种，该女生在内的选法有种，共有种选法.

（3） 恰有2名男生被选中；

[解析]从3名男生中选取2人，有种选法，再从余下的4名女生中选取1人，有种选法，共有种选法.

（4） 至少有2名女生被选中；

[解析]若选取1名男生2名女生，有种选法，若选取3名女生，有种选法，共有种选法.

（5） 至多有2名男生被选中.

[解析]总的选法有种，选取3名男生的情况有种，共有种选法.



**组合问题的常见题型及解题策略**

|  |  |
| --- | --- |
| 题型 | 解法 |
| “含有”或“不含有”某些元素的组合 | “含”，则先将这些元素取出，再由另外元素补足；“不含”，则先将这些元素剔除，再从剩下的元素中选取 |
| “至少”或“至多”含有几个元素的组合 | 要重视“至少”与“至多”这两个关键词的含义，谨防重复与漏解.用直接法和间接法都可以求解，通常用直接法，当分类复杂时，考虑利用逆向思维，即用间接法处理 |

#### **考点三 排列与组合的综合应用［多维探究］**

##### **不同元素的分组问题角度1**

典例1 （一题练透）某数学活动小组由4名同学组成，现将4人进行分组.在下列不同条件下，求不同的分组方法.

（1）（整体均分问题）平均分成两组;

（2）（部分均分问题）分成三组，其中一组两个人，其余两组各一个人;

（3）（不等分问题）分成两组，其中一组一个人，另外一组3个人.

[解析]（1）不同的分法有（种）.

（2）不同的分法有（种）.

（3）不同的分法有（种）.

变式设问 某数学活动小组的4名同学被派去两个不同的城市参加数学竞赛，求在下列条件下各有多少种不同的分配方法.

（1）两个城市各2人；

（2）其中一个城市1人，另外一个城市3人.

[解析]（1）由分组方法有种，再把两组人分到两个不同的城市有种分法，共有种分法.

（2）由典例可知，分组方法有种，再把两组人分到两个不同的城市有种分法，共有种分法.



**不相同元素的分组问题的求解策略**

1.对于整体均分，解题时要注意分组后，不管它们的顺序如何，都是一种情况，所以分组后一定要除以全排列数为均分的组数，避免重复计数；

2.对于部分均分，解题时注意重复的次数是均匀分组的阶乘数，即若有组元素个数相等，则分组时应除以，分组过程中有几个这样的均匀分组，就要除以几个这样的全排列数；

3.对于不等分组，只需先分组，后排列，因为分组时任何组中元素的个数都不相等，所以不需要除以全排列数.

##### **相同元素的分组问题角度2**

典例2 把4个相同的小球装进3个不同的盒子中，不允许有空盒，则有3种不同的装法.

[解析]4个小球完全相同，只要将它们分成3份即可.这4个小球，每两个之间有一个空位置，4个小球之间有3个空位置，只要在这三个空位置中任选两个，插入两块挡板，即可将4个小球分成3份，如：●|●|●●；●|●●|●；●●|●|●，故不同的分配方案共有（种）.

变式设问 若将典例2中的条件“不允许有空盒”改为“允许有空盒”，则有15种不同的装法.

[解析]因为允许有空盒，所以挡板可以放在4个小球空出的前面位置，也可以放在后面的位置，还可以放在两个小球间的相邻位置，所以挡板可放的“位置数”“小球数”“挡板数”，只要在这6个位置种选两个位置放上挡板即可.如|●●●●|表示0，4，0的分配方法（即第一和第三个盒子都空，第二个盒子放4个小球）；●|●●●|表示1，3，0的分配方法（即第一个盒子1个小球，第二个盒子3个小球，第三个盒子空）.故总的分配方法有（种）.



**相同元素的分组的求解策略**

1.对于个元素分成组，且每组至少一个元素的分组问题，可采用“挡板法”解决,个元素之间形成个空，只需放入个挡板即可，故不同的分配方案有种；

2.将个小球装入个不同的盒子中，允许有空盒的装法共有种是挡板数.

##### **多维训练**

1. [2021·全国乙卷]将5名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶4个项目进行培训，每名志愿者只分配到一个项目，若每个项目至少分配一名志愿者，则不同的分配方案共有240种.

[解析]不同的分配方案共有（种）.

变式设问 若将本题条件“花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶4个项目”改为“花样滑冰、冰球和冰壶3个项目”，则不同的分配方案有150种.

[解析]由题可知有1，1，3和2，2，1两种分配方案，则不同的分配方案有（种）.

2. 现有6个大学保送名额，计划分到4个班级，每班至少1个名额，则有10种不同的分法.

[解析]利用挡板法，6个元素5个空，放3块挡板，则有种分法.

变式设问 若将本题条件“每班至少一个名额”改为“不要求每个班都分到名额”，则有84种不同的分法.

[解析]利用挡板法，挡板可放置数为，放3块挡板，有种分法.